Международная студенческая олимпиада "Изумруд.Студент" 2022/2023 учебного года

Направление "Математика и информатика"

Блок 2

1 Пусть V — множество всех четверок целых чисел с операциями покомпонентного сло-жения и умножения на целые числа. Пусть U — множество всех четверок неотрицательных целых чисел.

а) Покажите, что существуют такие четверки целых чисел $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, что любой элемент U однозначно представим в виде линейной комбинации этих четверок с неотрицательными целыми коэффициентами.

б) Покажите, что существуют такие четверки целых чисел $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, что любой элемент U однозначно представим в виде линейной комбинации этих четверок с неотрицательными целыми коэффициентами и при этом среди четверок $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$ есть такие, у которых не все компоненты неотрицательные.

в) Докажите, что не существует таких четверок целых чисел $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, что любой элемент V однозначно представим в виде линейной комбинации этих четверок с неотрицательными целыми коэффициентами.

г) Пусть выбраны такие четверки целых чисел $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, что любой элемент U однозначно представим в виде линейной комбинации этих четверок с неотрицательными целыми коэффициентами. Может ли оказаться так, при представлении четверки $(2022, 2022, 2022, 2022)$ в виде линейной комбинации этих четверок с неотрицательными целыми коэффициентами какой-то из коэффициентов окажется нечетным?

Решение и критерии оценивания.

а) Достаточно предъявить четверки $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. (5 баллов)

б) Достаточно предъявить четверки $(1, 0, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$ или другой правильный вариант (Это 5 баллов и еще 5 баллов за пункт а), если к нему примера не было) Нужно привести корректное обоснование, того, что предъявленная четверка удовлетворяет условию. Например, явно выразить коэффициенты линейной комбинации через компоненты произвольного вектора. Если, это выражение с неотрицательными коэфиициентами, то в силу неотрицательности компонент неотрицательность коэффициентов будет очевидна, в противном случае нужно дополнительное рассуждение. Для доказательства однозначности достаточно сослаться на однозначность представления произвольного вектора четырехмерного пространсва над полем, содержащим кольцо целых чисел в качестве подкольца. (За это доказательство еще 5 баллов, поскольку при хорошем примере оно может быть очень простым)

в) Выберем произвольный ненулевой вектор $\vec{v}$ и запишем его представление $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$ с неотрицательными целыми коэффициентами. При этом не все коэффициенты нули, поскольку вектор $\vec{v}$ не нулевой. (Если взять $\vec{v} = \vec{a}_1$, то и выписывать не надо) Для вектора $-\vec{v}$ тоже есть представление $-\vec{v} = \beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \beta_n \cdot \vec{a}_n$ с неотрицательными целыми коэффициентами. При этом не все коэффициенты нули, поскольку вектор $\vec{v}$ не нулевой. Сложив два этих представления получим представление нуль-вектора $\vec{0} = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \vec{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \vec{a}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \vec{a}_n$ в котором все коэффициенты целые неотрицательные и не все нули. Это противоречит однозначности представления нуль-вектора.

Если есть идея рассмотреть представление чеверки противоположной к какому-то ненулевому вектору не доведенное до полного доказательства (5 баллов). Полное доказательство (30 баллов)

г) Достаточно рассмотреть представление чеверки $(1011, 1011, 1011, 1011) = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$ с неотрицательными целыми коэффициентами. Тогда $(2022, 2022, 2022, 2022) = 2\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + 2\alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 2\alpha_n \cdot \vec{a}_n$ представление нужной четверки с неотрицательными целыми коэффициентами. По условию оно единственное, а все коэффициенты в нем четные. Значит в требуемом представлении никакой коэффициент нечетным оказаться не может.

Оценивается только полное доказательство (30 баллов)